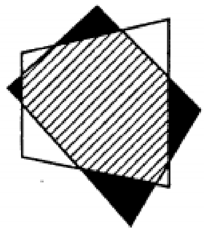
Вариант 1

Часть 1



1. Два равновеликих четырехугольника расположены так, как показано на рисунке. Сумма площадей черных треугольников равна S_1, а сумма площадей белых треугольников равна S_2. Сравните S_1 и S_2.

1. $S_1 < S_2$;
2. $S_1 = S_2$;
3. $S_1 > S_2$;
4. сравнить невозможно.

2. В треугольнике ABC к стороне a проведена высота h_a, а к стороне b проведена высота h_b. Сравните длины высот h_a и h_b, если $a > b$.

1. $h_a > h_b$;
2. $h_a = h_b$;
3. $h_a < h_b$;
4. сравнить невозможно.

3. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

Стороны параллелограмма 8 *см и* 6 *см, а одна из высот —* 10 *см. Найдите вторую высоту параллелограмма.*

1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решений нет.

4. Как изменится площадь прямоугольника, если одну его сторону уменьшить в три раза, а другую увеличить в три раза?

1. Увеличится в девять раз;
2. увеличится в три раза;
3. уменьшится в три раза;
4. не изменится.

5. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Из вершины C к стороне AB опущен перпендикуляр CF, его длина равна 15 см. Отрезок FB равен 8 см, а сторона AD равна 17 см. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

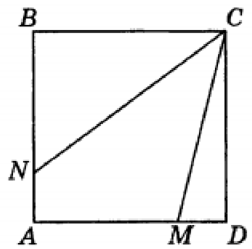
1. Параллелограмм;
2. прямоугольная трапеция;
3. трапеция, отличная от равнобедренной;
4. равнобедренная трапеция.

Часть 2

6. Площадь прямоугольника, в котором стороны относятся как 1 : 4, равна площади квадрата со стороной 6 см. Найдите большую сторону прямоугольника.

____

7. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отложены отрезки $AN = \frac{1}{4}AB$ и $AM = \frac{3}{4}AD$. Найдите площадь четырехугольника $ANCM$, если площадь $ABCD$ равна 1 см^2.



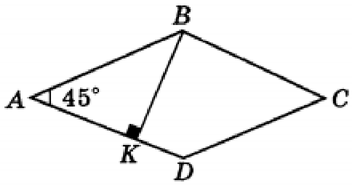
____

8. Соседние стороны параллелограмма равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

____

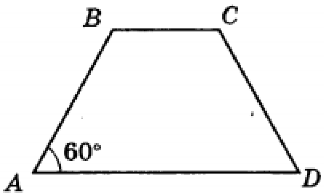
9. В ромбе $ABCD$ проведена высота BK, равная $5\sqrt{2}$ см. Найдите площадь ромба, если угол BAD равен $45°$.

____



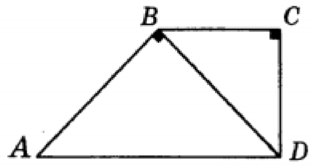
10. В равнобедренной трапеции $ABCD$ периметр равен 42 см, боковая сторона равна 10 см. Найдите площадь трапеции, если ее острый угол равен $60°$.

____



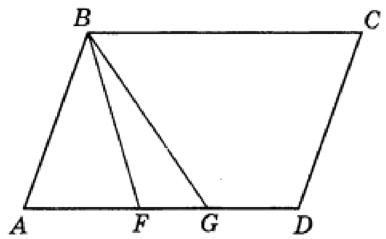
11. Диагональ BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($CD \perp AD$) отсекает от трапеции прямоугольный равнобедренный треугольник ABD. Найдите отношение диагонали BD трапеции к ее основанию AD, если основание BC равно a.

____



12. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD, равной 16 см, отмечены точки F и G. Найдите отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади треугольника GBF, если отрезок FG равен 4 см.

____



Часть 3

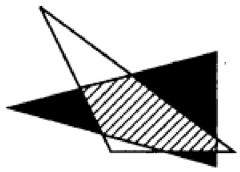
13. Треугольник ABC, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь треугольника BMC.

14. Найдите площадь трапеции, основания которой 3 см и 7 см, а диагонали — 6 см и 8 см.

15. В треугольнике ABC проведена медиана AD. На прямой, содержащей медиану AD, отмечена точка M. Докажите, что треугольники ABM и ACM равновелики.

Вариант 2

Часть 1



1. Два равновеликих треугольника расположены так, как показано на рисунке. Сумма площадей черных треугольников равна S_1, а сумма площадей белых треугольников равна S_2. Сравните S_1 и S_2.

1. $S_1 < S_2$;
2. $S_1 = S_2$;
3. $S_1 > S_2$;
4. сравнить невозможно.

2. В параллелограмме $ABCD$ к стороне a проведена высота h_a, а к стороне b проведена высота h_b. Сравните длины высот h_a и h_b, если $a > b$.

1. $h_a = h_b$;
2. $h_a < h_b$;
3. $h_a > h_b$;
4. сравнить невозможно.

3. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.
Стороны параллелограмма 15 см и 6 см, а одна из его высот — 18 см. Найдите вторую высоту параллелограмма.

1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решения нет.

4. Как изменится площадь прямоугольника, если одну его сторону увеличить в четыре раза, а другую уменьшить в два раза?

1. Увеличится в два раза;
2. увеличится в четыре раза;
3. уменьшится в два раза;
4. не изменится.

5. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны. Из вершины C к стороне AB опущен перпендикуляр CF, его длина равна 12 см. Отрезок FB равен 5 см, а сторона AD равна 15 см. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

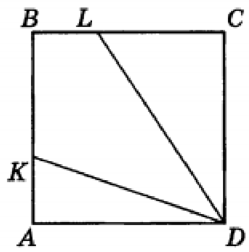
1. Параллелограмм;
2. прямоугольная трапеция;
3. трапеция, отличная от равнобедренной;
4. равнобедренная трапеция.

Часть 2

6. В прямоугольнике $ABCD$ стороны равны 3 см и 8 см. Найдите меньшую сторону равновеликого ему прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, периметр которого равен 20 см.

____

7. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ отложены отрезки $AK = \frac{1}{3}AB$ и $BL = \frac{1}{3}BC$. Найдите площадь четырехугольника $KBLD$, если площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2.

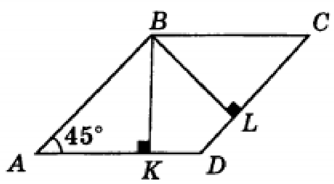


____

8. Тупой угол ромба равен 150°, а его сторона равна 6 см. Найдите площадь ромба.

____

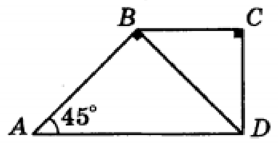
9. В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BK и BL, равные $3\sqrt{2}$ см и 5 см соответственно. Найдите площадь параллелограмма, если угол BAD равен 45°.



____

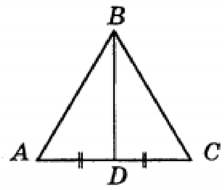
10. Одна из диагоналей прямоугольной трапеции делит эту трапецию на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Найдите площадь этой трапеции, если ее боковая сторона, прилежащая к прямому углу, равна 4.

____



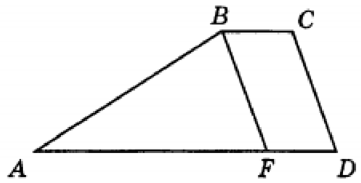
11. Сторона равностороннего треугольника равна a. Найдите отношение длины медианы этого треугольника к его стороне.

____



12. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 14 см и 4 см соответственно. Из вершины B проведена прямая, параллельная стороне CD. Найдите отношение площади трапеции $ABCD$ к площади треугольника ABF.

____



Часть 3

13. Каждая диагональ четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.

14. Найдите площадь трапеции, основания которой 6 см и 26 см, а боковые стороны — 12 см и 16 см.

15. В треугольнике ABC через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC. На этой прямой отмечена точка M. Докажите, что треугольники ABM и ACM равновелики.

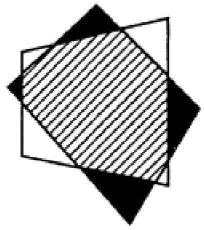
Ответы и решения.

Вариант 1

Часть 1

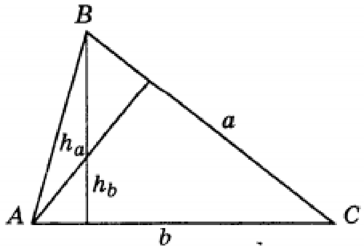
1. Ответ: 2.

Решение. По основному свойству площади каждый из двух равновеликих четырехугольников состоит из общей части, отмеченной "штриховкой", и для одного из них четырех белых треугольников, а для другого четырех черных треугольников. Сумма площадей белых треугольников равна разности всей площади четырехугольника и общей части и равна S_2. Аналогично, сумма площадей черных треугольников равна разности всей площади четырехугольника и общей части и равна S_1. Как S_1, так и S_2 равна разности равных площадей, т. е. $S_1 = S_2$.



2. Ответ: 3.

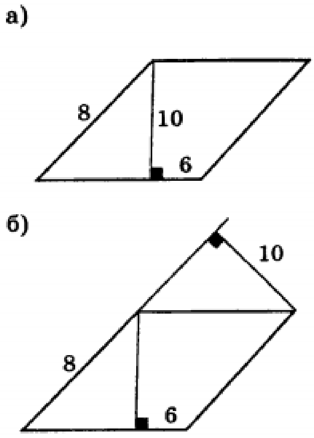
Решение. Площадь треугольника $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$, отсюда, если $a > b$, то $h_a < h_b$.



3. Ответ: 4.

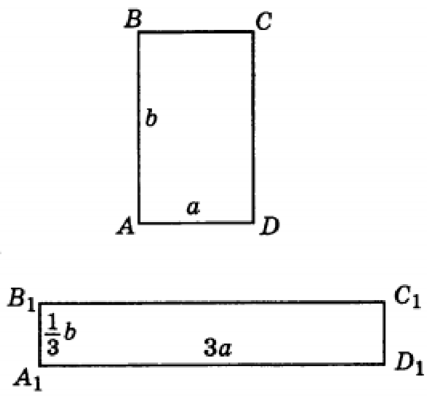
Анализируем условие задачи:

В прямоугольном треугольнике наибольшим является прямой угол, значит, гипотенуза больше катета. Если провести высоту к стороне, равной 6 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 10 см, а гипотенуза 8 см (рис. а). Такой треугольник не существуют. Если провести высоту к стороне, равной 8 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 10 см, а гипотенуза 6 см (рис. б). Такой треугольник не существуют. Следовательно, задача не имеет решения.



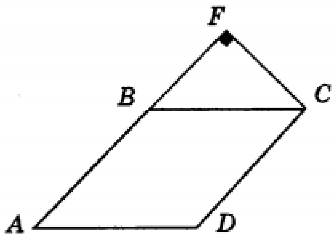
4. Ответ: 4.

Решение. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна $S = ab$, а площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна $S_1 = \frac{a}{3} \cdot 3b = ab$. Следовательно, если сторону AB уменьшить в три раза, а сторону AD другую увеличить в три раза, то площадь не изменится.



5. Ответ: 1.

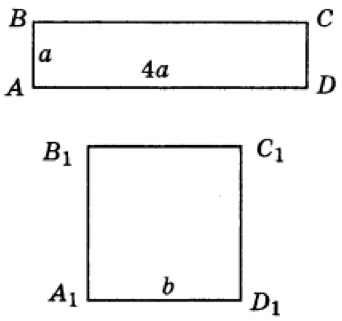
Решение. Так как у четырехугольника $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, то четырехугольник $ABCD$ по определению — трапеция. Треугольник CFB — прямоугольный, так как по условию $CF \perp AB$. Значит, по теореме Пифагора $BC^2 = CF^2 + FB^2 = 15^2 + 8^2 = 289$, $BC = 17$ (см). Таким образом, $BC = 17$ см, а по условию $AD = 17$ см. Следовательно, у четырехугольника $ABCD$ стороны BC и AD равны и параллельны, значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.



Часть 2

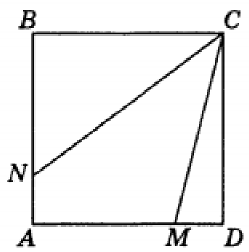
6. Ответ: 12.

Решение. Прямоугольник $ABCD$ и квадрат $A_1B_1C_1D_1$ равновеликие. Площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ $S = b^2 = 36$ см^2, значит, и площадь прямоугольника $ABCD$ равна 36 см^2. По условию стороны прямоугольника $ABCD$ относятся как 1 : 4, значит, его площадь равна $S = 4a \cdot a$. Отсюда $36 = 4a^2$; $a = 3$ (см). Следовательно, большая сторона прямоугольника равна 12 см.



7. Ответ: 0,5.

Решение. Площадь квадрата $ABCD$ равна сумме площади треугольника NBC, площади треугольника MCD и площади четырехугольника $ANCM$ $S_{ABCD} = S_{NBC} + S_{MCD} + S_{ANCM}$. Следовательно, площадь четырехугольника $ANCM$ равна $S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{NBC} - S_{MCD}$. По условию на стороне AB квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AN = \frac{1}{4}AB$, значит, отрезок $BN = \frac{3}{4}AB$. Так как площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2, то сторона квадрат равна 1 см.

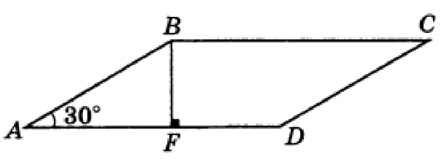


Отсюда следует, что площадь треугольника NBC $S_{NBC} = \frac{1}{2}NB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8}$ (см^2).

По условию на стороне AD квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AM = \frac{3}{4}AD$, значит, отрезок $MD = \frac{1}{4}AD$. Отсюда следует, что площадь треугольника MCD $S_{MCD} = \frac{1}{2}MD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8}$ (см^2). Значит, $S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{NBC} - S_{MCD} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (см^2).

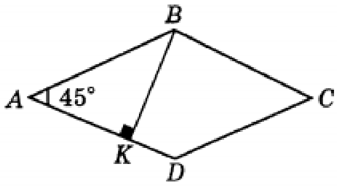
8. Ответ: 44.

Решение. По условию стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно равны 8 см и 11 см. Проведем высоту BF в прямоугольном треугольнике ABF, $\angle BAF = 30°$. По свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен 30°, катет BF равен 4 см. Значит, площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S_{ABCD} = AD \cdot BF = 11 \cdot 4 = 44$ (см^2).



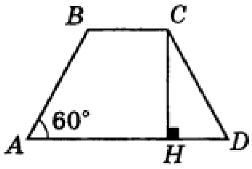
9. Ответ: $50\sqrt{2}$.

Решение. По условию отрезок BK — высота ромба $ABCD$, значит, треугольник ABK — прямоугольный, у которого $\angle BAD = 45°$, значит, прямоугольный треугольник ABK — равнобедренный, $BK = AK$. Сторона AB ромба $ABCD$ является гипотенузой прямоугольного равнобедренного треугольника ABK. По теореме Пифагора $AB^2 = BK^2 + AK^2 = 2 \cdot (5\sqrt{2})^2$, $AB = 10$ (см). Так как в ромбе все стороны равны, то $AB = AD = 10$ см. Площадь ромба $ABCD$ равна $S_{ABCD} = AD \cdot BK = 10 \cdot 5\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$ (см^2).



10. Ответ: $55\sqrt{3}$.

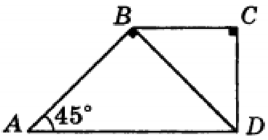
Решение. Проведем из вершины B равнобедренной трапеции $ABCD$ высоту BH, значит, треугольник ABK — прямоугольный, у которого $\angle BAD = 60°$. Тогда по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен $30°$, катет AH прямоугольного треугольника ABH равен 5 см. По теореме Пифагора катет $BH^2 = AB^2 - AH^2 = \sqrt{10^2 - 5^2}$, $BH = 5\sqrt{3}$ (см).



По условию $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 42$ см и $AB = CD = 10$ см, значит, $BC + AD = 22$ см. Площадь трапеции $ABCD$ равна $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = 11 \cdot 5\sqrt{3} = 55\sqrt{3}$ (см^2).

11. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

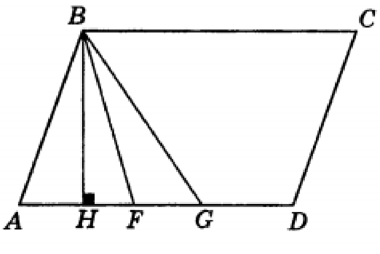
Решение. По условию треугольник ABD — прямоугольный, равнобедренный, значит, $\angle BAD = \angle BDA = 45°$. Так как $CD \perp AD$ и $\angle BDA = 45°$, то $\angle BDC = 45°$. Следовательно, треугольник BCD — прямоугольный, равнобедренный, значит, $BC = CD = a$. Диагональ BD является гипотенузой прямоугольного треугольника ABD и по теореме Пифагора $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 2a^2$.



$BD = a\sqrt{2}$. Так как треугольник ABD — прямоугольный, равнобедренный, то $AD^2 = AB^2 + BD^2 = 4a^2$, $AD = 2a$. Следовательно, $BD : AB = a\sqrt{2} : 2a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Ответ: 8.

Решение. В параллелограмме $ABCD$ из вершины B к основанию AD проведем высоту BH, которая является и высотой для треугольника FBG, так как основание треугольника FBG лежит на основании параллелограмма $ABCD$.



$S_{FBG} = \frac{1}{2} FG \cdot BH = 2BH$; $S_{ABCD} = AD \cdot BH = 16BH$.

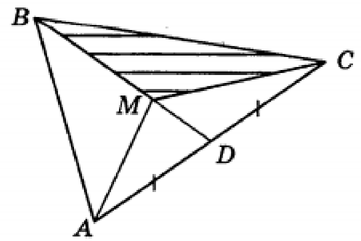
$S_{ABCD} : S_{FBG} = 16BH : 2BH = 8$.

Часть 3

13. Ответ: 28.

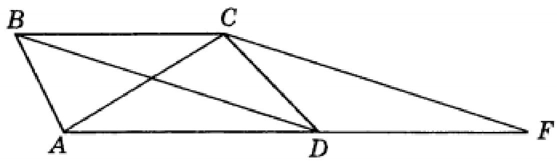
Решение. Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона: $p = \frac{a+b+c}{2} = 21$ (см);

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84$ (см^2).



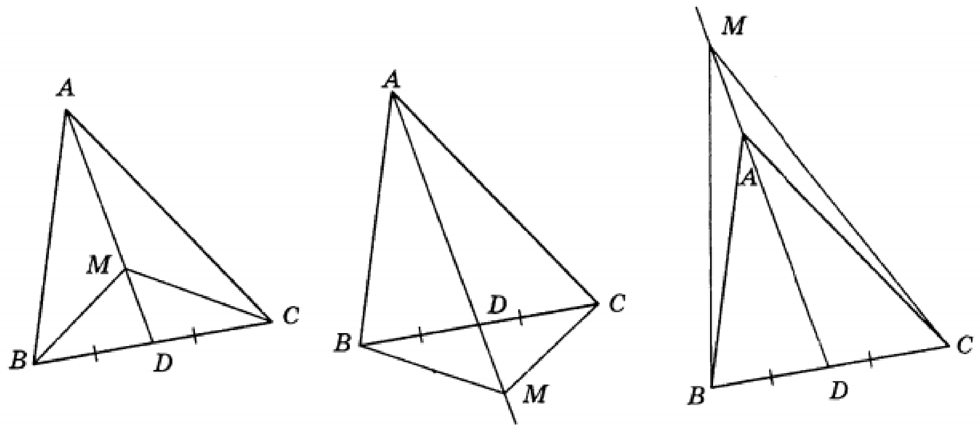
Медиана BD делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника ABD и CBD ($AD = CD$, а высота, проведенная из точки B, — общая). Кроме того, так как $BM : MD = 2 : 1$, то $S_{BMC} = 2S_{DMC}$ (эти треугольники имеют общую высоту, проведенную из точки C). Таким образом, $S_{BDC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 42$ (см^2), $S_{BMC} = \frac{2}{3}S_{BDC} = \frac{2}{3} \cdot 42 = 28$ (см^2).

14. Ответ: 24.



Решение. Через вершину C трапеции $ABCD$ проведем прямую CF, параллельную диагонали BD. Тогда четырехугольник $DBCF$ — параллелограмм, так как $BC \parallel AD$ ($ABCD$ — трапеция), $FC \parallel BD$ по построению. Следовательно, $FC = BD = 8$ (см); $DF = BC = 3$ (см). Таким образом, длины сторон треугольника ACF равны $FC = 8$ см, $AC = 6$ см и $AF = 10$ см. По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ACF — прямоугольный. Значит, $S_{ACF} = \frac{1}{2}AC \cdot FC = 6 \cdot 8 = 24$ (см^2). В треугольниках ABC и CDF основания (DF и BC) и высоты (расстояние между параллельными прямыми) равны, поэтому эти треугольники равновелики. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$, $S_{ACF} = S_{ACD} + S_{CDF}$. Следовательно, $S_{ABCD} = S_{ACF} = 24$ (см^2).

15. Ответ: 24.



а) б) в)

Решение. Возможны три варианта расположения точки M.

1. Точка M принадлежит медиане AD (рис. а). Так как отрезок AD — медиана треугольника ABC, то треугольники ABD и ACD равновелики и $BD = CD$.

Значит, MD — медиана треугольника BMC. Следовательно, и треугольники BMD и CMD равновелики. Следовательно, треугольники AMB и AMC равновелики.

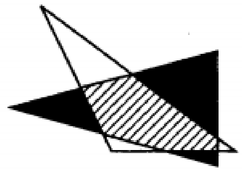
2. Точка M принадлежит продолжению медианы AD за точку D (рис. б). Доказательство аналогично доказательству варианта 1. Площади треугольников AMB и AMC равны соответственно суммам площадей равновеликих треугольников: $S_{AMB} = S_{ABD} + S_{BMD}$ и $S_{AMC} = S_{ACD} + S_{CMD}$.

3. Точка M принадлежит продолжению медианы AD за точку A (рис. в). Доказательство аналогично доказательству варианта 1. Площади треугольников AMB и AMC равны соответственно разностям площадей равновеликих треугольников: $S_{AMB} = S_{BMD} - S_{ABD}$ и $S_{AMC} = S_{CMD} - S_{ACD}$.

Вариант 2

Часть 1

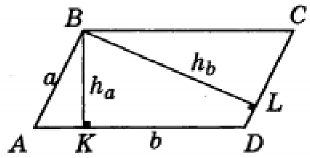
1. Ответ: 2.



Решение. По основному свойству площади каждый из двух равновеликих треугольников состоит из общей части, отмеченной "штриховкой", и для одного из них трех белых треугольников, а для другого трех черных треугольников. Сумма площадей белых треугольников равна разности всей площади треугольника и общей части и равна S_2. Аналогично, сумма площадей черных треугольников равна разности всей площади треугольника и общей части и равна S_1. Как S_1 так и S_2 равна разности равных площадей, т. е. $S_1 = S_2$.

2. Ответ: 2.

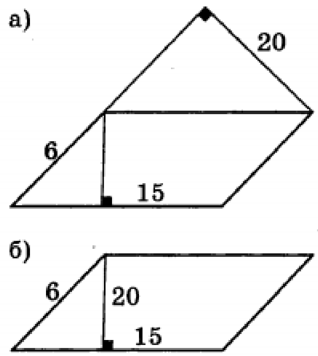
Решение. Площадь параллелограмма $S = ah_a = bh_b$, отсюда, если $a > b$, то $h_a < h_b$.



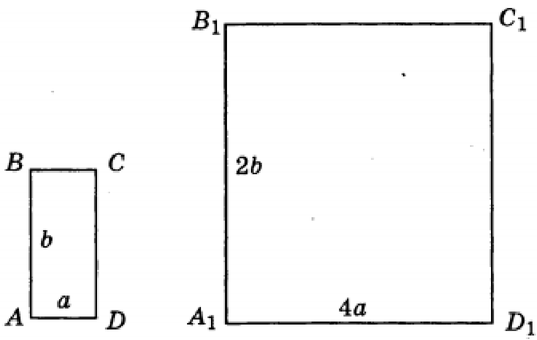
3. Ответ: 4.

Анализируем условие задачи.

В прямоугольном треугольнике наибольшим является прямой угол, значит, гипотенуза больше катета. Если провести высоту к стороне, равной 6 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 20 см, а гипотенуза 15 см. Такой треугольник не существует. Если провести высоту к стороне, равной 15 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 20 см, а гипотенуза 6 см. Такой треугольник не существует. Следовательно, задача не имеет решений.



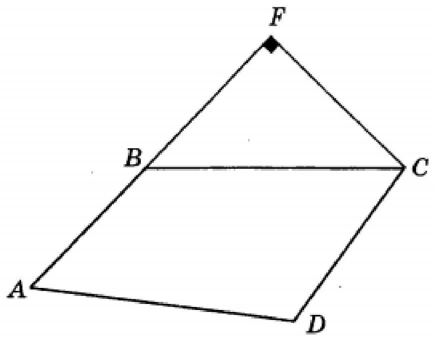
4. Ответ: 1.



Решение. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна $S = ab$, а площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна $S_1 = 4a \cdot \frac{b}{2} = 2ab$. Следовательно, если сторону AB уменьшить в два раза, а сторону AD увеличить в четыре раза, то площадь увеличится в два раза.

5. О т в е т: 3.

Решение. Так как у четырехугольника $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, то это может быть либо параллелограмм, либо трапеция. Треугольник CFB — прямоугольный, так как по условию $CF \perp AB$. Значит, по теореме Пифагора $BC^2 = CF^2 + BF^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, $BC = 13$ (см). По условию, сторона AD равна 15 см, следовательно, у четырехугольника $ABCD$ стороны BC и AD не равны. Значит, четырехугольник $ABCD$ — трапеция, отличная от равнобедренной.

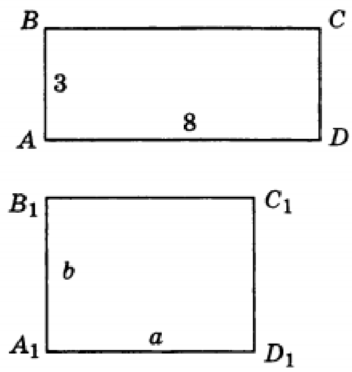


Часть 2

6. О т в е т: 4.

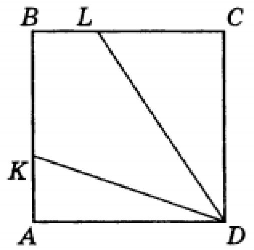
Решение. Прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равновеликие. Площадь прямоугольника $ABCD$ $S_{ABCD} = 3 \cdot 8 = 24$ (см^2), значит, и площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна 24 см^2. По условию периметр прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равен 20 см. Значит, $a + b = 10$, а его площадь равна $S_{A_1B_1C_1D_1} = ab = 24$. Отсюда $\begin{cases} a + b = 10, \\ ab = 24; \end{cases}$ $a = 10 - b$; $(10 - b)b = 24$; $b^2 - 10b + 24 = 0$. Следовательно, b равно 4 см или 6 см, при этом a равно соответственно 6 см или 4 см.

Значит, меньшая сторона прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна 4 см.



7. О т в е т: 0,5.

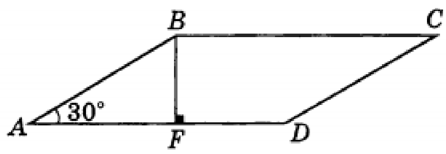
Решение. Площадь квадрата $ABCD$ равна сумме площади треугольника KAD, площади треугольника LCD и площади четырехугольника $KBLD$ $S_{ABCD} = S_{KAD} + S_{LCD} + S_{KBLD}$. Следовательно, площадь четырехугольника $KBLD$ равна $S_{KBLD} = S_{ABCD} - S_{KAD} - S_{LCD}$. По условию на стороне AB квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AK = \frac{1}{3}AB$. Так как площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2, то сторона квадрата равна 1 см. Отсюда следует, что площадь треугольника KAD $S_{KAD} = \frac{1}{2}KA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$ (см^2).



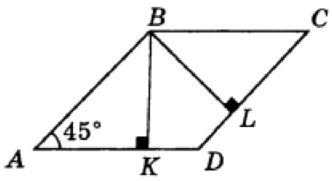
По условию на стороне BC квадрата $ABCD$ отложен отрезок $BL = \frac{1}{3}BC$, значит, отрезок $LC = \frac{2}{3}BC$. Отсюда следует, что площадь треугольника LCD $S_{LCD} = \frac{1}{2}LC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ (см^2). Значит $S_{KBLD} = S_{ABCD} - S_{KAD} - S_{LCD} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (см^2).

8. О т в е т: 18.

Решение. В ромбе $ABCD$ проведем высоту BF. По условию $\angle ABC = 150°$, значит, $\angle BAD = 30°$. По свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен $30°$, катет BF прямоугольного треугольника ABF равен 3 см. Значит, площадь ромба $ABCD$ равна $S_{ABCD} = AD \cdot BF = 6 \cdot 3 = 18$ (см^2).

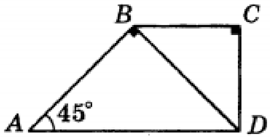


9. Ответ: 30.



Решение. По условию отрезок BK — высота параллелограмма $ABCD$, значит, треугольник ABK — прямоугольный, у которого $\angle BAD = 45°$, и значит, прямоугольный треугольник ABK — равнобедренный, $BK = AK$. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ является гипотенузой прямоугольного равнобедренного треугольника ABK. По теореме Пифагора $AB^2 = BK^2 + AK^2 = 2 \cdot (3\sqrt{2})^2 = 36$, $AB = 6$ (см). Так как в параллелограмме противолежащие стороны равны, то $AB = CD = 6$ см. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S_{ABCD} = CD \cdot BL = 6 \cdot 5 = 30$ (см^2).

10. Ответ: 24.

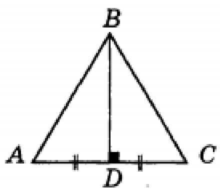


Задача может быть решена несколькими способами.

Решение. 1 способ. Проведем из вершины B прямоугольной трапеции $ABCD$ высоту BH. Тогда трапеция разобьется на три равных прямоугольных треугольника, катеты которых равны 4. Площадь каждого треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$, значит, площадь трапеции равна сумме площадей трех прямоугольных равнобедренных треугольников, т. е. 24.

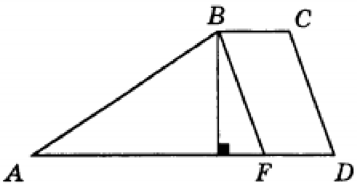
2 способ. Катет прямоугольного равнобедренного треугольника ABD является гипотенузой прямоугольного равнобедренного треугольника BCD. Площадь трапеции равна сумме площадей двух прямоугольных равнобедренных треугольников ABD и BCD, стороны которых равны 4 и $4\sqrt{2}$; $S_{BCD} = \frac{1}{2}4^2 = 8$, $S_{ABD} = \frac{1}{2}(4\sqrt{2})^2 = 16$, $S = S_{BCD} + S_{ABD} = 8 + 16 = 24$.

11. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Решение. В равнобедренном треугольнике ABC медиана BD является его высотой, значит, отрезок BD — высота и треугольник ABD — прямоугольный, у которого $AB = a$, $AD = \frac{a}{2}$. По теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 - AD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Следовательно, $BD : AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a : a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. Ответ: 1,8.

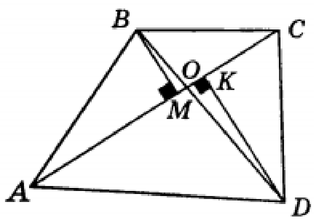


Решение. В трапеции $ABCD$ высота BH является общей высотой для треугольника FBG и трапеции $ABCD$. Основание треугольника ABF лежит на основании трапеции $ABCD$ и равно 10 см, так как четырехугольник $FBCD$ — параллелограмм по определению ($AD \parallel BC$, $FB \parallel CD$). Значит, $AF = 10$ см.

$$S_{FBG} = \frac{1}{2}AF \cdot BH = 5BH; \; S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = 9BH; \; S_{BCD} : S_{ABF} = 9BH : 5BH = 1{,}8.$$

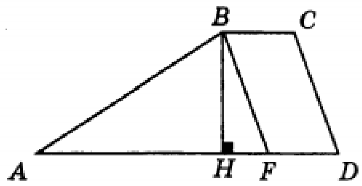
Часть 3

13. Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Проведем перпендикуляры BM и DK к диагонали AC. По условию $S_{ABC} = S_{ADC}$, следовательно, $BM = DK$. Углы BOM и DOK равны, как вертикальные. Следовательно, прямоугольные треугольники BOM и DOK равны (по катету и острому углу), отсюда $BO = DO$. Аналогично, из равенства $S_{ABD} = S_{CBD}$ получим, что $AO = CO$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, следовательно, четырехугольник $ABCD$ параллелограмм.



14. Ответ: 153,6.

Решение. Через вершину B трапеции $ABCD$ проведем прямую BF, параллельную стороне CD. Тогда четырехугольник $FBCD$ — параллелограмм, так как $BC \parallel AD$ по определению трапеции, $BF \parallel CD$ по построению.



Следовательно, $BF = CD = 12$ (см); $FD = BC = 6$ (см). Таким образом, в треугольнике ABF стороны равны 12 см, 16 см и 20 см. Так как длины сторон этого треугольника удовлетворяют условию теоремы, обратной теореме Пифагора, то этот треугольник — прямоугольный. Следовательно, $S_{ABF} = \frac{1}{2}AB \cdot BF = 96$ (см^2). Высота BH треугольника ABF является также высотой параллелограмма $ABCD$; $BH = \frac{2S_{ABF}}{AF} = 9,6$ (см).

Площадь трапеции можно найти двумя способами.

1. $S_{ABCD} = S_{ABF} + S_{BCDF}$; $S_{BCDF} = BC \cdot BH = 57,6$ (см^2); $S_{ABCD} = 153,6$ см^2.

2. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = 153,6$ (см^2).

15. Решение. Прямая параллельна стороне BC, значит, все треугольники BMC равновелики треугольнику ABC. Из площадей равновеликих треугольников ABC и BMC вычтем общую часть — площадь треугольника BKC и получим равновеликие треугольники BAK и CMK. Теперь к площадям равновеликих треугольников BAK и CMK прибавим общую часть — площадь треугольника AKM. Таким образом получили, что треугольники ABM и ACM равновелики.