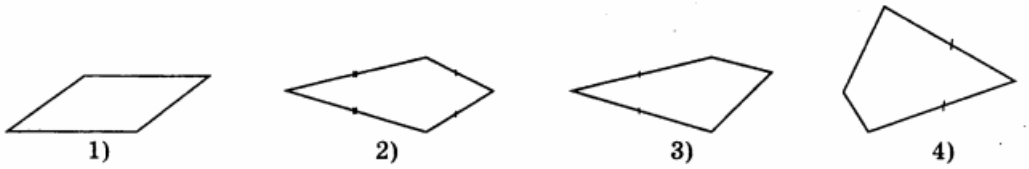
Вариант 1

Часть 1

1. Определите, какой из приведенных ниже четырехугольников имеет ось симметрии. Укажите номер этого четырехугольника в ответе.



1. 1); 2. 2); 3. 3); 4. 4).

2. Определите по рисунку вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.

1. Центральная симметрия (укажите центр);
2. поворот (укажите угол и направление);
3. осевая симметрия (укажите ось);
4. параллельный перенос (укажите вектор).

3. Параллелограмм имеет только одну ось симметрии. Определите его вид.
1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. такой параллелограмм не существует.

4. Треугольник имеет три оси симметрии. Определите вид треугольника.
1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

5. При центральной симметрии относительно вершины C треугольника ABC его вершина A переходит в точку D, а вершина B — в точку F. Определите взаимное расположение прямых, содержащих высоты AM и DN треугольников ABC и FDC.
1. Прямые перпендикулярны;
2. прямые пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые параллельны;
4. прямые совпадают.

Часть 2

6. Определите, сколько существует движений, переводящих квадрат сам в себя.

_____

7. Угол ABC, равный $\alpha\,(\alpha < 90°)$, при повороте на $60°$ в направлении от A к C переходит в угол A_1BC_1. Найдите угол ABC_1.

_____

8. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. При симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его гипотенузу AB, вершина C треугольника перешла в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если катет треугольника равен 12 см.

_____

9. Внутри угла AOB, равного $45°$, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Определите угол M_1OM_2.

_____

10. Дан равносторонний треугольник ABC. При повороте треугольника на угол $180°$ вокруг середины одной из его сторон вершина A перешла в точку A_1, вершина B — в точку B_1, вершина C — в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если сторона треугольника равна 12 см.

_____

11. При повороте на угол 90° вокруг точки пересечения диагоналей параллелограмм перешел сам в себя. Определите его вид.

---

12. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. При параллельном переносе вершина A перешла в точку D, а треугольник ABC — в треугольник $DB'C'$. Найдите периметр четырехугольника $ABB'D$, если боковая сторона треугольника равна 5 см, а его основание 8 см.

Часть 3

13. В треугольнике ABC вершина B симметрична точке K относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине A. Найдите отрезок CK, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

14. Соседние оси симметрии правильного многоугольника пересекаются под углом 15°. Какое число сторон имеет этот многоугольник?

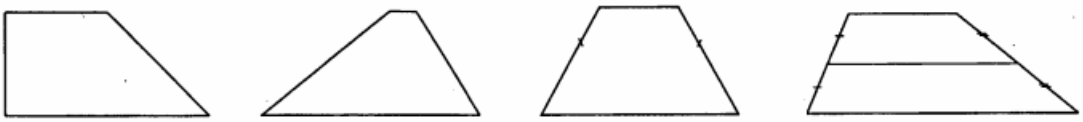
15. Две деревни A и B находятся по одну сторону от шоссе a. Определите, где на шоссе a надо расположить остановку автобуса K, чтобы сумма расстояний $AK + KB$ была наименьшей?

Замечание. Шоссе считаются прямой линией.

Вариант 2

Часть 1

1. По данным рисункам определите, какая среди приведенных ниже трапеций имеет ось симметрии. Укажите номер этой трапеции в ответе.



1) 2) 3) 4)

1. 1); 2. 2); 3. 3); 4. 4).

2. Определите по рисунку вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.

1. Центральная симметрия (укажите центр);
2. поворот (укажите угол и направление);
3. осевая симметрия (укажите ось);
4. параллельный перенос (укажите вектор).

3. Параллелограмм имеет четыре оси симметрии. Определите его вид.

1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. такой параллелограмм не существует.

4. Треугольник имеет только одну ось симметрии. Определите вид треугольника.

1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

5. Дан треугольник ABC. При центральной симметрии относительно вершины C его вершина A перешла в точку D, а вершина B — в точку F. Определите взаимное расположение прямых, содержащих биссектрисы CM и CN треугольников ABC и FDC.

1. Прямые перпендикулярны;
2. прямые пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые параллельны;
4. прямые совпадают.

Часть 2

6. Определите, сколько существует движений, переводящих ромб сам в себя.

_____

7. Угол ABC, равный $\alpha\,(\alpha < 90^\circ)$, при повороте на 60° в направлении от A к C переходит в угол A_1BC_1. Найдите угол CBA_1.

_____

8. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. При симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его катет AC, вершина B треугольника перешла в точку B_1. Найдите длину отрезка BB_1, если гипотенуза треугольника равна 7 см.

_____

9. Внутри угла AOB, равного 90°, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Определите угол M_1OM_2.

_____

10. Дан равносторонний треугольник ABC. При повороте треугольника на угол 180° вокруг вершины A вершина B треугольника перешла в точку B_1, вершина C — в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если сторона треугольника равна 12 см.

_____

11. При повороте на угол 120° вокруг центра вписанной окружности треугольник перешел сам в себя. Определите его вид.

_____

12. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана BD. При параллельном переносе точка A перешла в точку D, а треугольник ABC — в треугольник $DB'C'$. Найдите периметр четырехугольника $ABB'D$, если сторона треугольника равна 6 см.

_____

Часть 3

13. В треугольнике ABC вершина B симметрична точке K относительно биссектрисы внешнего угла треугольника при вершине A. Найдите отрезок CK, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

14. Соседние оси симметрии правильного многоугольника пересекаются под углом 20°. Какое число сторон имеет этот многоугольник?

15. Две деревни A и B находятся по одну сторону от шоссе a. Определите, где на шоссе a надо расположить остановку автобуса K, чтобы расстояния от каждой из деревень до остановки были равными.

Замечание. Шоссе считаются прямой линией.

Ответы и решения.

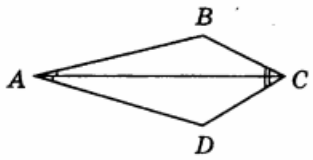
Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 2.

Решение. На рисунке — это четырехугольник 2). Рассмотрим этот четырехугольник и обозначим его вершины $ABCD$. Если провести диагональ AC, то получаем два равных треугольника ABC и ADC по трем сторонам $AB = AD$ и BC и DC (по данным чертежа) и AC (общая).

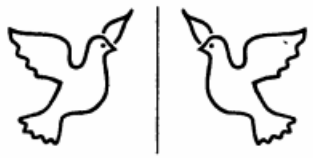
Значит, $\angle CAB = \angle CAD$, следовательно, AC — биссектриса $\angle BAD$ и является его осью симметрии, аналогично CA — биссектриса $\angle BCD$ и является его осью симметрии, значит, диагональ AC является осью симметрии четырехугольника $ABCD$.



2. Ответ: 3.

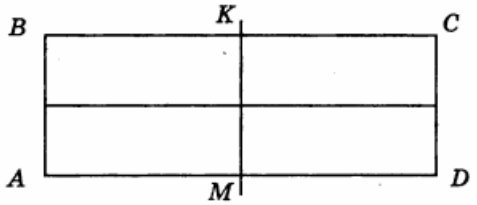
Задание направлено на проверку сформированности пространственного представления. Необходимо по рисунку определить вид движения.

Решение. На рисунке представлена осевая симметрия. Примерное расположение оси указано на рисунке.

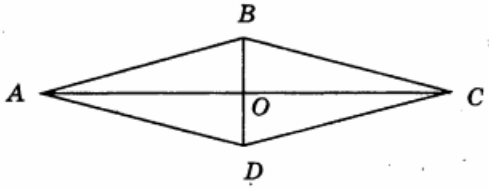


3. Ответ: 4.

Решение. У параллелограмма $ABCD$ при осевой симметрии ось симметрии может походить через середину стороны BC. Это прямая KM. При симметрии относительно прямой KM, проходящей через середину стороны BC параллелограмма $ABCD$, вершина B переходит в вершину C, а вершина A должна перейти в вершину D. При этом $KM \perp BC$ и $BK = KC$. В параллелограмме противолежащие стороны равны и параллельны, значит, и $AM = MD$. Следовательно, в параллелограмме $ABCD$ при симметрии относительно прямой KM стороны AD и BC переходят сами в себя. В четырехугольнике $MKCD$ стороны KC и MD равны и параллельны, а угол MKC — прямой, значит, четырехугольник $MKCD$ — прямоугольник, отсюда параллелограмм $ABCD$ также прямоугольник.



а)



б)

Однако, если данный параллелограмм — прямоугольник, то он имеет вторую ось симметрии, проходящую через середины сторон AB и CD, но по условию ось симметрии только одна. Пришли к противоречию.

Рассмотрим симметрию параллелограмма $ABCD$ относительно оси BD, которая является диагональю параллелограмма. При этом две вершины, а именно, B и D переходят сами в себя, так как лежат на оси симметрии, а вершина C должна перейти в вершину A, значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

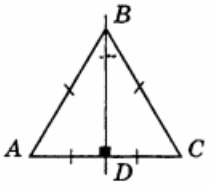
Однако, если данный параллелограмм — ромб, то он имеет вторую ось симметрии, проходящую через вершины A и C, т.е. диагональ AC, но по условию ось симметрии только одна. Пришли к противоречию.

Так как по определению квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны, то квадрат имеет четыре оси симметрии. Пришли к противоречию с условием задачи.

Следовательно, такой параллелограмм не существует.

4. Ответ: 2.

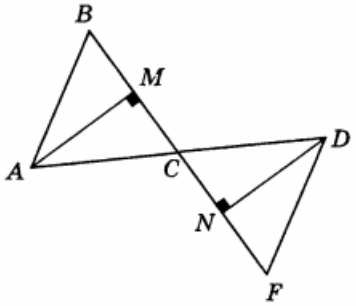
Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина треугольника должна перейти в другую его вершину. Но у треугольника три вершины, следовательно, одна из них должна перейти сама в себя, т.е. лежать на оси симметрии. Рассмотрим симметрию треугольника ABC относительно прямой BD, проходящей через вершину B. Так как BD — ось симметрии треугольника ABC, то



вершина A переходит в вершину C, $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Значит, в треугольнике ABC медиана BD является и высотой. Следовательно, $AB = BC$. Аналогично, при рассмотрении симметрии относительно прямой, проходящей через вершину A, доказывается, что стороны AC и AB равны. Значит, в треугольнике ABC все три стороны равны: $AB = BC = AC$ и треугольник ABC — равносторонний. Рассмотрение симметрии относительно прямой, проходящей через вершину C, позволяет проверить доказанное утверждение, т.е. подтвердить, что стороны $AC = BC$. Следовательно, треугольник — равносторонний.

5. Ответ: 3.

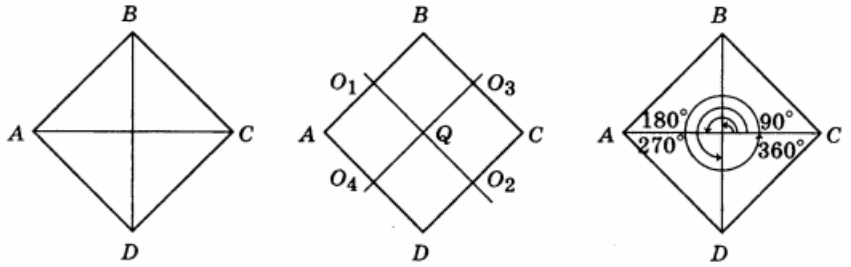
Решение. При преобразовании симметрии относительно точки C вершина A перешла в точку D, причем точки A, C и D лежат на одной прямой AD, а вершина B — в точку F и точки B, C и F лежат на одной прямой BF. В треугольнике ABC проведена высота AM из вершины A к стороне BC, а в треугольнике FDC проведена высота DN из вершины D к стороне FC. Таким образом, к прямой BF проведены два перпендикуляра AM и DN, следовательно, прямые, содержащие высоты AM и DN, параллельны.



Часть 2

6. Ответ: 6.

Решение. Квадрат $ABCD$ переходит сам в себя при симметрии: 1) относительно прямых AC и BD, 2) относительно прямых O_1O_2 и O_3O_4, 3) точки Q пересечения диагоналей, 4) при повороте на $90° n$, где n — целое число, относительно центра Q. При этом следует заметить, что симметрия относительно центра квадрата совпадает с поворотом на $180°$.

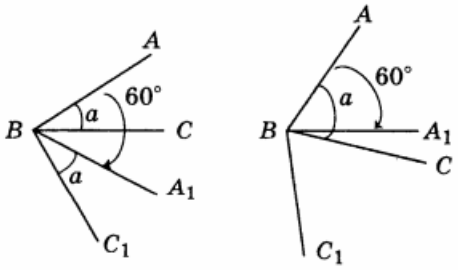


7. Ответ: $60° + \alpha$.

Решение. Возможны два случая: 1) $\alpha < 60°$ и 2) $\alpha > 60°$.

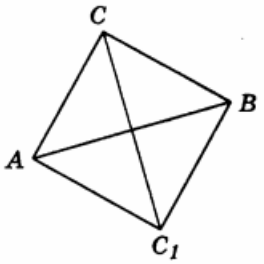
При повороте угла ABC на $60°$ каждый луч, выходящий из точки B поворачивается на угол в $60°$, т.е. луч BA перейдет в луч BA_1 и $\angle ABA_1 = 60°$, а луч BC — в луч BC_1 и $\angle CBC_1 = 60°$.

В первом случае, так как $\alpha < 60°$, то луч BC проходит между сторонами угла ABA_1, значит, $\angle CBA_1 = \angle ABA_1 - \angle ABC = 60° - \alpha$ и $\angle CBA_1 < 60°$. Отсюда следует, что луч BA_1 проходит между сторонами угла $\angle CBC_1$, равного $60°$. Таким образом, $\angle ABC_1 = \angle ABC + \angle CBA_1 + \angle A_1B_1C_1 = \alpha + 60° - \alpha + \alpha = 60° + \alpha$.



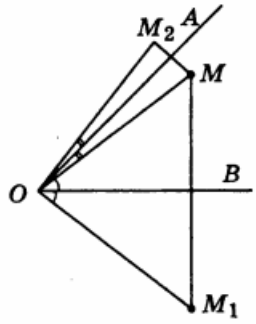
Во втором случае, так как $\alpha > 60°$, то луч BA_1 проходит между сторонами угла ABC, значит, $\angle A_1BC = \angle ABC - \angle ABA_1 = \alpha - 60°$ и $\angle A_1BC < \alpha$. Отсюда следует, что луч BC проходит между сторонами угла $\angle A_1BC_1$, равного α. Таким образом, $\angle ABC_1 = \angle ABA_1 + \angle A_1BC + \angle CBC_1 = 60° + 60° + \alpha - 60° = 60° + \alpha$.

8. Ответ: $12\sqrt{2}$ см.



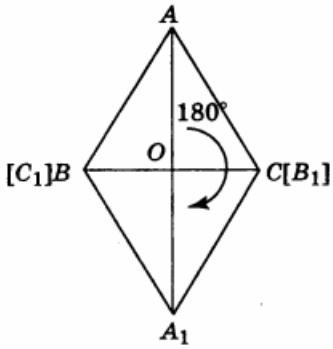
Решение. При симметрии относительно прямой отрезки переходят в равные им отрезки. Так как при симметрии прямоугольного равнобедренного треугольника ABC относительно прямой, содержащей его гипотенузу AB, вершина C перешла в точку C_1, катет AC перешел в равный ему отрезок AC_1, а катет BC — в отрезок BC_1. Таким образом, у четырехугольника $ABCC_1$ все стороны равны и угол ACB равен $90°$, то четырехугольник $ABCC_1$ — квадрат, в котором CC_1 является диагональю. У квадрата диагонали равны, значит $AB = CC_1$. По теореме Пифагора найдем AB как гипотенузу прямоугольного треугольника ABC; $AB = 12\sqrt{2}$ (см), следовательно, $CC_1 = 12\sqrt{2}$ (см).

9. Ответ: $90°$.



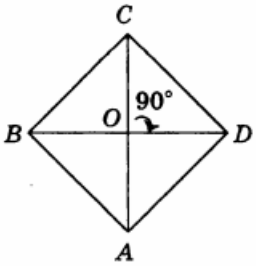
Решение. Соединим точки M, M_1 и M_2 с вершиной угла — точкой O. При симметрии относительно прямой углы переходят в равные им углы, значит, $\angle AOM_2 = \angle AOM$ и $\angle BOM_1 = \angle BOM$. По построению точек M_1 и M_2 лучи OA и OB проходят между сторонами угла M_2OM_1, таким образом, $\angle M_2OM_1 = \angle AOM_2 + \angle AOB + \angle BOM_1 = 45° + (\angle AOM + \angle BOM) = 90°$.

10. Ответ: 12 см.



Решение. Пусть точка O — середина стороны BC. При повороте на угол $180°$ около точки O луч OB переходит в луч OB_1, а луч OC переходит в луч OC_1, который дополняет луч OB_1 до прямой, при этом точка O принадлежит это прямой. По свойству поворота отрезок переходит в равный ему отрезок, значит, отрезок OB переходит в равный отрезок OB_1. Поскольку точка O — середина стороны BC, значит, точка B_1 совпадает с точкой C и аналогично точка C_1 совпадает с точкой B. Следовательно, отрезок CC_1 равен отрезку $BC = 12$ (см) как сторона равностороннего треугольника.

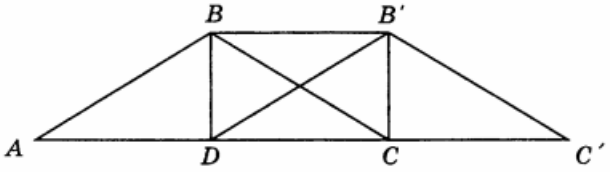
11. Ответ: квадрат.



Решение. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. При повороте около точки O на угол $90°$ луч OB переходит в луч OC, а луч OC — в луч OD, луч OD — в луч OA и луч OA — в луч OB. Значит, диагонали AC и BD параллелограмма перпендикулярны, $AC \perp BD$. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб. При повороте вершина C должна перейти в вершину D так, что $OC = OD$, т. е. диагонали ромба равны. Следовательно, ромб — квадрат.

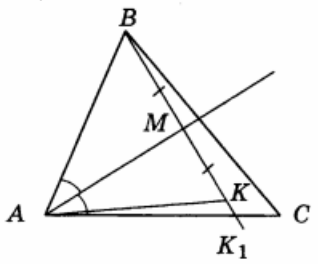
12. Ответ: 18 см.

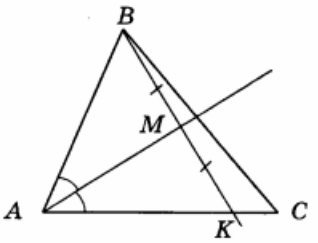
Решение. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на равные расстояния, при этом прямая переходит в параллельную прямую или сама в себя, а поскольку параллельный перенос — движение, то равные отрезки переходят в равные. При параллельном переносе треугольник ABC перешел в треугольник $DB'C'$, причем вершина A перешла в точку D, вершина B перешла в точку B' и $BB' = AD$, $AB = DB'$, кроме того, $BB' \parallel AD$, $AB \parallel DB'$. Следовательно, четырехугольник $ABB'D$ — параллелограмм. Точка D — основание медианы BD, значит, $AD = \frac{1}{2}AC = 4$ (см). $P_{ABB'D} = AB + BB' + DB' + AD = 2AD + 2AB = 2(4 + 5) = 18$ (см).



13. Ответ: 2 см.

Решение. По условию вершина B треугольника ABC симметрична точке K, значит, отрезки BM и MK равны, а прямые BK и AM перпендикулярны. Следовательно, треугольники ABM и AKM — прямоугольные и равны по двум катетам ($BM = MK$, катет AM — общий). Из равенства треугольников ABM и AKM следует $\angle KAM = \angle BAM$. Обозначим точку пересечения прямой BK со стороной AC буквой K_1. По условию $\angle BAM = \angle K_1AM$ так как AM — биссектриса $\angle BAC$. Следовательно, $\angle KAM = \angle BAM = \angle K_1AM$. Получили, что от одного луча AM в одну полуплоскость отложены два равных угла, что противоречит аксиоме откладывания углов. Значит, точки K и K_1 совпадают. Отсюда, в треугольнике ABK биссектриса угла BAK является высотой и медианой, следовательно, треугольник BAK — равнобедренный, $AB = AK$. Отсюда $CK = AC - AB = 5 - 3 = 2$ (см).

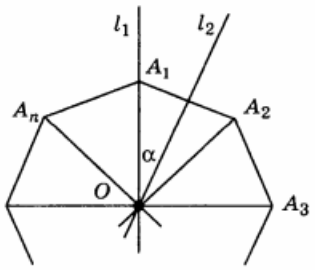




14. Ответ: 12.

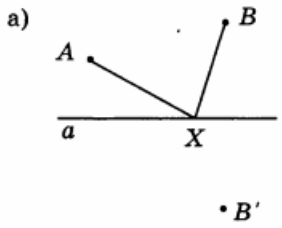
Решение. Если число сторон правильного многоугольника n — нечетное, то такой многоугольник имеет n осей симметрии, которые проходят через одну из вершин и середину противолежащей стороны. Если число сторон правильного многоугольника равно n — четное, то такой многоугольник имеет n осей симметрии. При этом $\frac{1}{2}n$ осей проходят через противолежащие вершины и $\frac{1}{2}n$ осей проходят через середины противолежащих сторон.

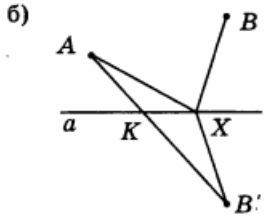
В обоих случаях l_1 — первая из соседних осей, которая проходит через вершину A_1, и l_2 — вторая из соседних осей, которая проходит через середину стороны A_1A_2. Треугольник A_1OA_2 — равнобедренный, так как данный многоугольник — правильный. Прямая l_2 — проходит через середину стороны A_1A_2 и перпендикулярна ей, значит, луч l_2 является биссектрисой угла A_1OA_2 равнобедренного треугольника A_1OA_2. По условию $\angle l_1l_2 = 15°$, следовательно, $\angle A_1OA_2 = 30°$ и имеет 12 сторон ($n = 360° : 30° = 12$).



15.

Решение. Предположим, что задача решена и остановка находится в некоторой точке X (рис. а). Значит, надо минимизировать сумму $AX + XB$. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой a (рис. б). По определению осевой симметрии $BX = B'X$. Поэтому $AX + XB = AX + XB'$. Сумма $AX + XB'$ будет наименьшей в том случае, когда точка X является точкой пересечения отрезка AB' с прямой a. Соединим точки A и B'. Отрезок AB' пересекает прямую a в точке K (рис. б). Точка K и дает решение задачи.

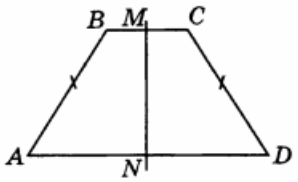




Вариант 2

Часть 1

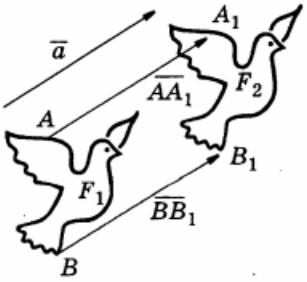
1. Ответ: 3.



Решение. На рисунке — это трапеция 3). Рассмотрим эту трапецию и обозначим ее вершины $ABCD$. Проведем прямую NM, проходящую через середину стороны BC и перпендикулярную ей. Тогда прямая NM перпендикулярна и стороне AD, так как по данным чертежа BC и AD — основания трапеции, значит, $BC \parallel AD$. Рассмотрим симметрию относительно этой прямой.

Так как $BM = MC$, то вершина B переходит в вершину C, по данным чертежа $AB = CD$, значит, отрезок AB переходит в отрезок CD, следовательно, вершина A переходит в вершину D. Значит, трапеция $ABCD$ при симметрии относительно прямой NM переходит сама в себя и прямая NM — ее ось симметрии.

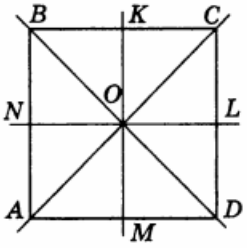
2. Ответ: 4.



Решение этой задачи опирается на рисунок. Точка A фигуры F_1 отображается в точку A_1 фигуры F_2, а точка B фигуры F_1 отображается в точку B_1 фигуры F_2 так, что $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$. Таким образом, каждая точка фигуры F_1 отображается в точку фигуры F_2, передвигаясь по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Следовательно, движение, данное на рисунке, является параллельным переносом на вектор $\bar{a}$.

3. Ответ: 3.

Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина параллелограмма должна перейти в другую его вершину. Так как у параллелограмма четыре вершины, то две вершины параллелограмма должны перейти в две другие вершины параллелограмма. Рассмотрим симметрию параллелограмма $ABCD$ относительно оси BD, которая является диагональю параллелограмма. При этом две вершины, а именно, B и D переходят сами в себя, так как лежат на оси симметрии, а вершина C должна перейти в вершину A, значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

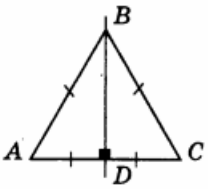


При симметрии относительно прямой KM, проходящей через середину стороны BC ромба $ABCD$, вершина B переходит в вершину C, а вершина A должна перейти в вершину D. При этом $KM \perp BC$ и $BK = KC$. В ромбе все стороны равны, а противолежащие стороны параллельны, значит, $KM \perp AD$ и $AM = MD$. Следовательно, в ромбе $ABCD$ при симметрии относительно прямой KM стороны AD и BC переходят сами в себя. Отсюда отрезок AB переходит в равный ему отрезок CD. В четырехугольнике $MKCD$ стороны KC и MD равны и параллельны, а угол MKC — прямой, значит, четырехугольник $MKCD$ — прямоугольник, отсюда ромб $ABCD$ — квадрат.

Рассмотрение симметрии ромба $ABCD$ относительно прямой NL, проходящей через середину стороны AD приводит к тому же результату, а именно ромб $ABCD$ — квадрат.

Следовательно, если параллелограмм имеет четыре оси симметрии, то он — квадрат.

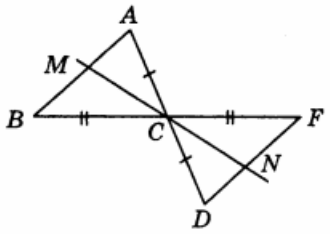
4. Ответ: 3.



Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина треугольника должна перейти в другую его вершину. Но у треугольника три вершины, следовательно, одна из них должна перейти сама в себя, т. е. лежать на оси симметрии. Рассмотрим симметрию треугольника ABC относительно прямой BD, проходящей через вершину B. Так как BD — ось симметрии треугольника ABC, то вершина A переходит в вершину C, при этом, $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Значит, в треугольнике ABC медиана BD является и высотой. Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.

5. Ответ: 4.

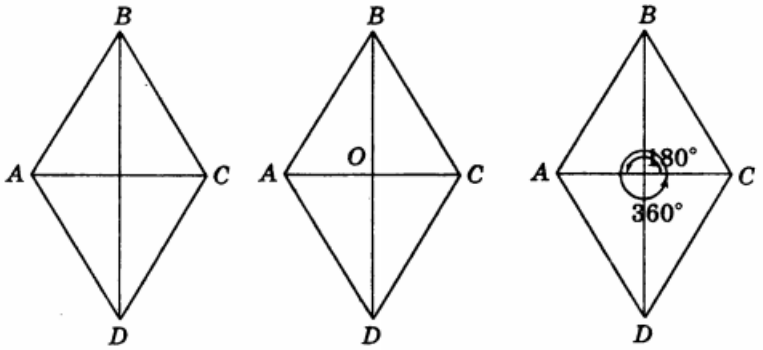
Решение. При преобразовании симметрии относительно точки C вершина A перешла в точку D, причем точки A, C и D лежат на одной прямой AD, а вершина B — в точку F и точки B, C и F лежат на одной прямой BF. Так как точка C принадлежит и прямой AD и прямой BF, значит, прямые AD и BF пересекаются в точке C. Следовательно, углы ACB и FCD — вертикальные. В треугольнике ABC отрезок CM является биссектрисой угла ACB, а в треугольнике FDC отрезок CN является биссектрисой угла FCD. Известно, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, значит, прямые, содержащие биссектрисы CM и CN, совпадают.



Часть 2

6. Ответ: 4.

Решение. Ромб $ABCD$ переходит сам в себя при осевой симметрии относительно прямых AC и BD, при центральной симметрии относительно точки O, при повороте на $180° n$, где n — целое число, относительно центра O. При этом следует заметить, что симметрия относительно центра ромба совпадает с поворотом на $180°$.

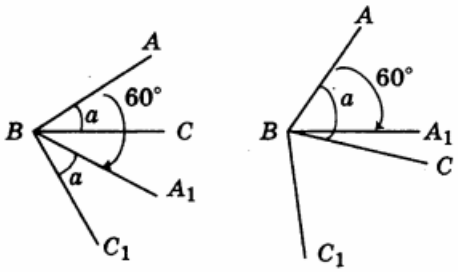


7. Ответ: $60° + \alpha$.

Решение. Возможны два случая: 1) $\alpha < 60°$ и 2) $\alpha > 60°$.

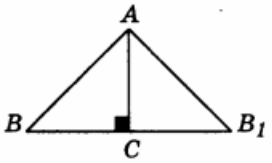
При повороте угла ABC на $60°$ каждый луч, выходящий из точки B поворачивается на угол в $60°$, т.е. луч BA перейдет в луч BA_1 и $\angle ABA_1 = 60°$, а луч BC — в луч BC_1 и $\angle CBC_1 = 60°$.

В первом случае, так как $\alpha < 60°$, то луч BC проходит между сторонами угла ABA_1, значит, $\angle CBA_1 = \angle ABA_1 - \angle ABC = 60° - \alpha$. Во втором случае, так как $\alpha > 60°$, то луч BA_1 проходит между сторонами угла ABC, значит, $\angle A_1BC = \angle ABC - \angle ABA_1 = \alpha - 60°$.



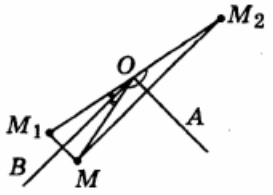
8. Ответ: $7\sqrt{2}$ см.

Решение. При симметрии относительно прямой отрезки переходят в равные им отрезки, а углы — в равные им углы. При симметрии прямоугольного равнобедренного треугольника AC относительно прямой, содержащей его катет AC, вершина B перешла в точку B_1, значит, катет BC перешел в равный ему отрезок CB_1, а угол BAC — в равный ему угол B_1AC, катет AC перешел сам в себя. Таким образом, у треугольника BAB_1 угол BAB_1 — прямой, стороны AB и AB_1 равны, значит треугольник BAB_1 — прямоугольный и равнобедренный. По теореме Пифагора найдем BB_1 как гипотенузу прямоугольного треугольника BAB_1; $BB_1 = \sqrt{2AB^2} = 7\sqrt{2}$ (см).



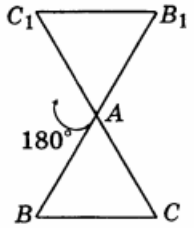
9. Ответ: 180°.

Решение. Соединим точки M, M_1 и M_2 с вершиной угла — точкой O. При симметрии относительно прямой углы переходят в равные им углы, значит, $\angle AOM_2 = \angle AOM$ и $\angle BOM_1 = \angle BOM$. По построению точек M_1 и M_2 лучи OA и OB проходят между сторонами угла M_2OM_1, таким образом, $\angle M_2OM_1 = \angle AOM_2 + \angle AOB + \angle BOM_1 = 90^\circ + (\angle AOM + \angle BOM) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.



10. Ответ: 180°.

Решение. При повороте около вершины A вершина A переходит сама в себя, а вершина B — в точку B_1, вершина C — в точку C_1, при этом расстояния между точками сохраняются. Значит, $AB = AB_1$, $AC = AC_1$. При повороте на угол 180° вокруг вершины A, луч AC переходит в луч AC_1, который дополняет луч AC до прямой, при этом точка A принадлежит отрезку CC_1. Таким образом, $CC_1 = AC + AC_1 = 2\,AC = 24$ (см).

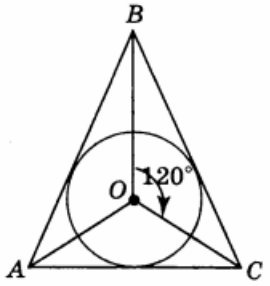


11. Ответ: равносторонний.

Решение. При повороте около точки O на угол 120° луч OB переходит в луч OC, а луч OC — в луч OA и луч OA — в луч OB. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника. Обозначим углы треугольника ABC: $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. Тогда в треугольнике BOC в силу теоремы о сумме углов треугольника $120^\circ + \beta + \gamma = 180^\circ$, отсюда, $\beta + \gamma = 60^\circ$. Из треугольника AOC получим $\alpha + \gamma = 60^\circ$, а из треугольника AOB получим $\alpha + \beta = 60^\circ$. Значит:

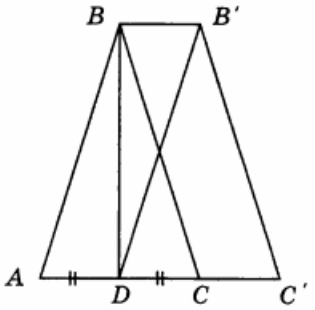
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 60^\circ, \\ \beta + \gamma = 60^\circ, \\ \alpha + \gamma = 60^\circ, \end{cases} \quad \alpha = 60^\circ - \beta,\ 60^\circ - \beta + \gamma = 60^\circ,\ \beta = \gamma.$$

Аналогично, получаем $\alpha = \beta$ и $\alpha = \gamma$. Таким образом в треугольнике ABC все углы равны, следовательно, треугольник — равносторонний.



12. Ответ: 18 см.

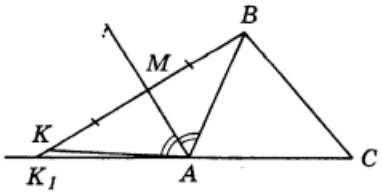
Решение. Точка D — середина стороны AC, так как отрезок DB — медиана треугольника ABC. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на равные расстояния, при этом прямая переходит в параллельную прямую или сама в себя, а поскольку параллельный перенос — движение, то равные отрезки переходят в равные. При параллельном переносе треугольник ABC перешел в треугольник $DB'C'$, причем вершина A перешла в точку D, вершина B перешла в точку B' и при этом $BB' = AD$, $AB = DB'$, кроме того, $BB' \parallel AD$, $AB \parallel DB'$. Следовательно, четырехугольник $ABB'D$ параллелограмм. Треугольник ABC — равносторонний, точка D — середина стороны AC, значит, $AD = AC = 3$ (см). $P_{ABB'D} = AB + BB' + DB' + AD = 2AD + 2AB = 2(3 + 6) = 18$ (см).



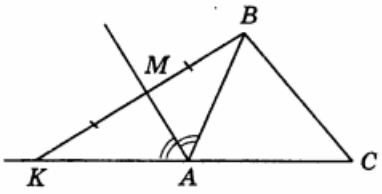
Часть 3

13. Ответ: 8 см.

Решение. По условию вершина B треугольника ABC симметрична точке K, значит, отрезки BM и MK равны, а прямые BK и AM перпендикулярны. Следовательно, треугольники ABM и AKM — прямоугольные и равны по двум катетам ($BM = MK$, катет AM — общий). Обозначим точку пересечения прямой BK с прямой, содержащей сторону AC, как K_1. По

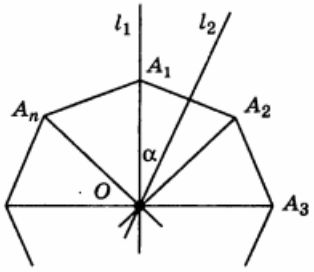


условию $\angle BAM = \angle K_1AM$, так как AM — биссектриса угла, смежного с углом BAC. Из равенства треугольников ABM и AKM следует $\angle BAM = \angle K_1AM$. Получили, что от одного луча AM в одну полуплоскость отложены два равных угла, что противоречит аксиоме откладывая углов. Значит, точки K и K_1 совпадают. Отсюда, в треугольнике ABK биссектриса угла BAK является высотой и медианой, следовательно, треугольник BAK — равнобедренный, $AB = AK$. Отсюда $CK = AC + AB = 5 + 3 = 8$ (см).



14. Ответ: 9.

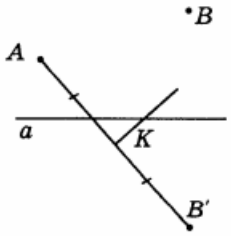
Решение. Если число сторон правильного многоугольника n — нечетное, то такой многоугольник имеет n осей симметрии, которые проходят через одну из вершин и середину противолежащей стороны. Если число сторон правильного многоугольника равно n — четное, то такой многоугольник имеет n осей симметрии. При этом $\frac{1}{2}n$ осей проходят через противолежащие вершины и $\frac{1}{2}n$ осей проходят через середины противолежащих сторон.



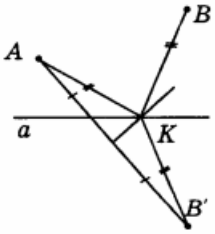
В обоих случаях l_1 — первая из соседних осей, которая проходит через вершину A_1, и l_2 — вторая из соседних осей, которая проходит через середину стороны A_1A_2. Треугольник A_1OA_2 — равнобедренный, так как данный многоугольник — правильный. Прямая l_2 — проходит через середину стороны A_1A_2 и перпендикулярна ей, значит луч l_2 является биссектрисой угла A_1OA_2 равнобедренного треугольника A_1OA_2. По условию $\angle l_1l_2 = 20°$, следовательно, $\angle A_1OA_2 = 40°$ и имеет 12 сторон ($n = 360° : 40 = 9$).

15.

Решение. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой a (рис. а). Соединим точки A и B' (рис. б). Построим серединный перпендикуляр к отрезку AB', который пересекает прямую a в точке K (рис. б). Соединим точку K с точками A и B' (рис. б). По свойству серединного перпендикуляра $AK = KB'$, а по свойству осевой симметрии $KB' = BK$, следовательно, $AK = BK$. Точка K и дает решение задачи.



а)



б)