

Вариант 1

Часть 1

1. Даны три прямые k , l и m . Прямые k и l пересекаются в точке A , прямые l и m пересекаются в точке B , а прямые k и m — в точке C . Определите, сколько существует окружностей, одновременно касающихся каждой из трех прямых k , l и m .

1. Ни одной; 2. одна; 3. три; 4. четыре.

2. Радиусы двух окружностей равны 6 см и 9 см, а расстояние между их центрами равно 9 см. Определите, сколько общих точек имеют эти окружности.

1. Ни одной; 2. одна; 3. две; 4. три.

3. Определите вид треугольника, если точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам лежит на одной из сторон треугольника.

1. Прямоугольный;
2. остроугольный;
3. тупоугольный;
4. определить невозможно.

4. Углы треугольника относятся, как 3 : 12 : 5. Определите, как расположен центр описанной около этого треугольника окружности.

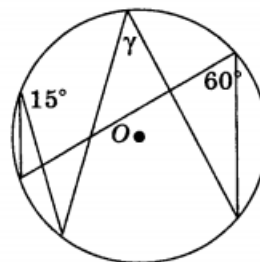
1. Внутри треугольника;
2. на одной из сторон треугольника;
3. вне треугольника;
4. определить невозможно.

5. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника лежат на одной из его высот и не совпадают. Определите вид треугольника.

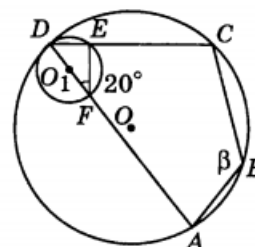
1. Равнобедренный;
2. равносторонний;
3. разносторонний;
4. определить невозможно.

Часть 2

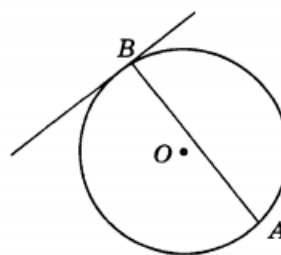
6. По данным рисунка найдите градусную меру угла γ .



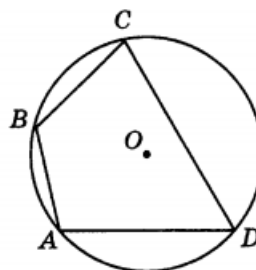
7. Две окружности касаются в точке D . Угол между диаметром FD и хордой FE меньшей окружности равен 20° . Найдите градусную меру угла β .



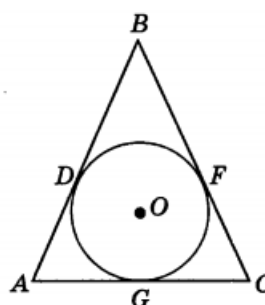
8. Хорда стягивает дугу окружности, градусная мера которой 40° . Найдите градусную меру угла, который образует эта хорда с касательной к окружности, проходящей через ее конец.



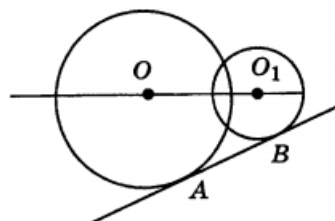
9. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности и разбивают ее на четыре дуги, градусные меры которых последовательно равны 56° , 74° , 97° и 133° . Найдите градусную меру меньшего угла четырехугольника.



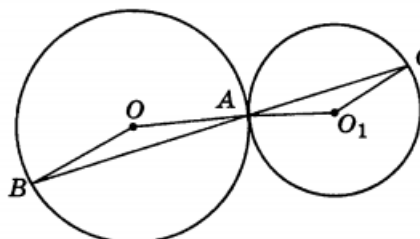
10. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность, которая касается основания AC в точке G , а боковых сторон — в точках D и F . Найдите периметр треугольника ABC , если $FB = 4$ см, $AG = 2$ см.



11. К двум окружностям с центрами в точках O и O_1 и радиусами, равными 12 см и 4 см, проведена касательная AB . Найдите расстояние между центрами окружностей, если отрезок касательной AB равен 15 см.



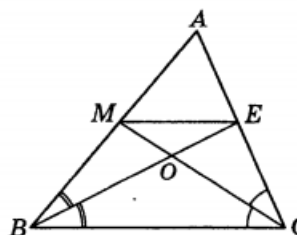
12. Две окружности с радиусами 9 см и 3 см касаются внешним образом в точке A , через которую проходит их общая секущая BC . Найдите длину отрезка AB , если AC равен 5 см.



Часть 3

13. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит внутри окружности, равна полусумме градусных мер дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая между продолжениями сторон.

14. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BE и CM . Найдите угол BEM , если угол BAC равен 60° .



Окружность

15. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны AD . Найдите острый угол параллелограмма.

Вариант 2

Часть 1

1. Даны три прямые k , l и m . Прямые k и l параллельны, а прямая m их пересекает. Определите, сколько существует окружностей, одновременно касающихся каждой из трех прямых k , l и m .

1. Ни одной;
2. одна;
3. две;
4. три.

2. Радиусы двух окружностей равны 4 см и 7 см, а расстояние между их центрами равно 11 см. Определите, сколько общих точек имеют эти окружности.

1. Ни одной;
2. одна;
2. две;
4. три.

3. Определите вид треугольника, если точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам лежит вне треугольника.

1. Прямоугольный;
2. остроугольный;
3. тупоугольный;
4. определить невозможно.

4. Углы треугольника относятся, как 3 : 4 : 5. Определите, как расположен центр окружности, описанной около этого треугольника.

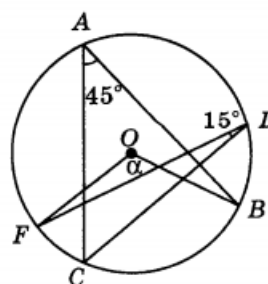
1. Внутри треугольника;
2. на одной из сторон треугольника;
3. вне треугольника;
4. определить невозможно.

5. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают. Определите вид треугольника.

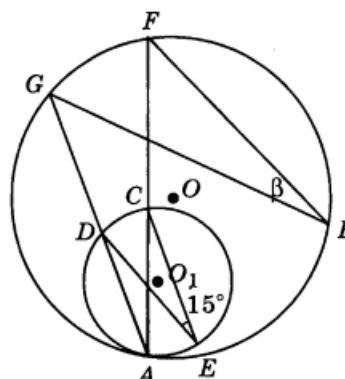
1. Равнобедренный;
2. равносторонний;
3. разносторонний;
4. определить невозможно.

Часть 2

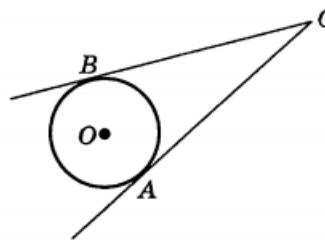
6. По данным рисунка найдите градусную меру угла α .



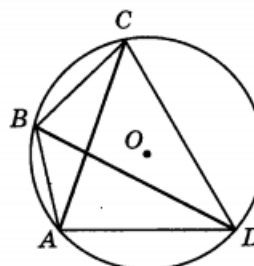
7. Две окружности с центрами в точках O и O_1 касаются внутренним образом. Угол, образованный хордами CE и DE окружности с центром в точке O_1 равен 15° . Найдите градусную меру угла, обозначенного буквой β .



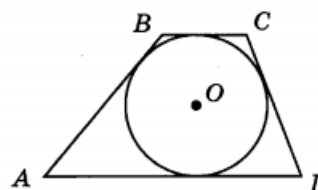
8. К окружности из точки C проведены касательные CA и CB . Найдите градусную меру угла ACB , если градусная мера меньшей дуги AB равна 108° .



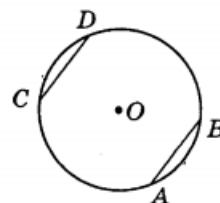
9. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ угол ABD равен 50° , а угол CDA равен 75° . Найдите угол CAD .



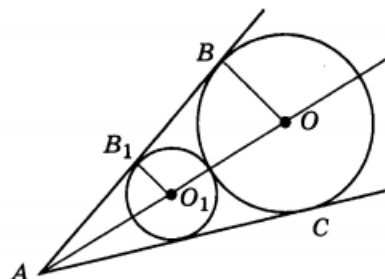
10. В трапецию вписана окружность. Найдите периметр этой трапеции, если ее основания равны 8 см и 12 см.



11. В окружности с диаметром 20 см проведены две параллельные хорды, длина каждой из которых равна 16 см. Найдите расстояние между хордами.



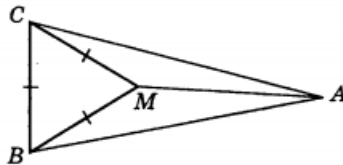
12. Две касающиеся внешним образом окружности с центрами в точках O и O_1 касаются сторон угла A (B и B_1 — точки касания). Расстояние между точками A и O_1 в два раза меньше, чем расстояние между центрами окружностей. Найдите радиус O_1B_1 , если радиус OB равен 24 см.



Часть 3

13. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит вне окружности, равна полуразности градусных мер дуг, заключенных между его сторонами.

14. В треугольнике ABC угол B равен 80° , угол C равен 70° . Внутри треугольника выбрана точка M так, что треугольник CMB — равносторонний. Найдите угол MAV .



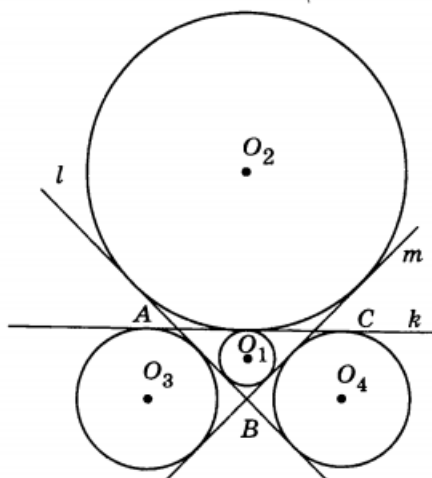
15. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на ее боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.

Ответы и решения.

Вариант 1

Часть 1

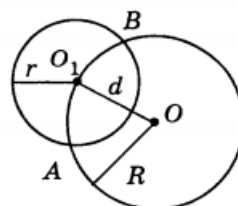
1. Ответ: 4.



Решение. Три попарно пересекающиеся прямые делят плоскость на семь частей. Четыре из них ограничены тремя данными прямыми: треугольник ABC и три части, определяемые одной из сторон треугольника, и двумя другими прямыми. Три другие части ограничены двумя лучами, являющимися продолжением сторон каждого из углов треугольника. Значит, только в четыре части плоскости можно вписать окружность так, чтобы она одновременно касалась каждой из трех прямых k , l и m .

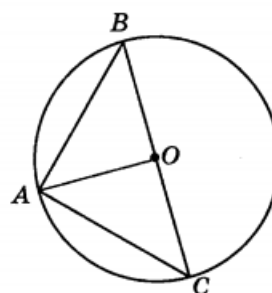
2. Ответ: 3.

Решение. Так как расстояние между центрами окружностей $d = 9$ см меньше суммы длин радиусов $R + r = 9 + 6 = 15$ (см), то окружности имеют две общие точки A и B . Заметим, поскольку расстояние между центрами окружностей $d = 9$ см равно радиусу большей окружности R , то центр меньшей окружности лежит на большей окружности.



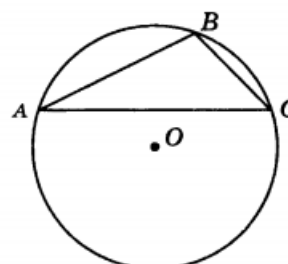
3. Ответ: 1.

Решение. Точка O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC является центром окружности, описанной около этого треугольника. Значит, вписанный угол BAC — прямой. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный.



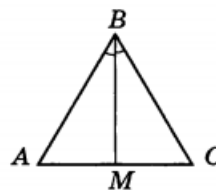
4. Ответ: 3.

Решение. По условию углы треугольника ABC равны 27° , 108° и 45° . Значит, треугольник ABC — тупоугольный. Угол ABC — тупой, следовательно, дуга ADC больше полуокружности, отсюда точки B и O лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC . Следовательно, центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит вне треугольника.



5. Ответ: 1.

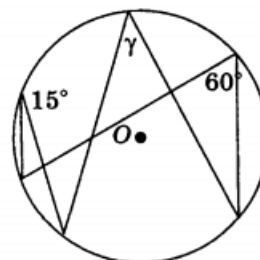
Решение. Центр вписанной окружности треугольника лежит на биссектрисе угла, а центр описанной окружности треугольника лежит на серединном перпендикуляре. По условию центры вписанной и описанной окружностей треугольника лежат на одной из его высот, следовательно, в данном треугольнике биссектриса, высота и серединный перпендикуляр совпадают. Значит, треугольник — равнобедренный.



Часть 2

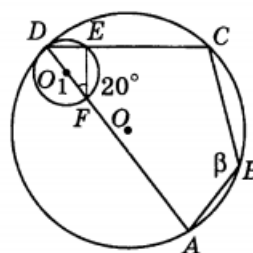
6. Ответ: 45.

Решение. Угол γ является вписанным углом GDB , который опирается на дугу GB . Дуга GB равна разности дуг окружности BC и CG . Так как углы BAC и CFG — вписанные, то дуги BC и CG соответственно равны 120° и 30° . Следовательно, дуга GB равна 90° , а угол GDB — 45° .



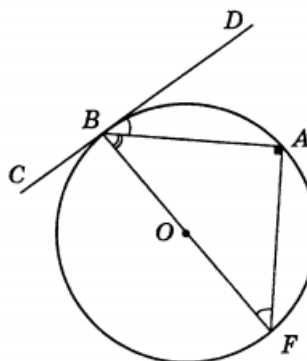
7. Ответ: 110.

Решение. Треугольник FDE — вписанный в окружность с центром O_1 , причем центр O_1 лежит на стороне DF треугольника FDE . Отсюда $\triangle FDE$ — прямоугольный, в котором вписанный $\angle FDE = 70^\circ$. Точка D — общая для обеих окружностей, значит, $\angle ADC$ — вписанный в окружность с центром в точке O . Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то угол ABC дополняет угол ADC до 180° . Значит, $\angle ABC = \beta = 110^\circ$.



8. Ответ: 20.

Решение. Проведем диаметр BF . Треугольник ABF — прямоугольный, поэтому $\angle BAF + \angle AFB = 90^\circ$. Так как диаметр BF проведен в точку касания прямой CD и окружности, то $\angle FBD = \angle ABD + \angle ABF = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = \angle ABD$. По теореме о вписанных углах $\angle AFB = \frac{1}{2} \cup AB$, значит, и $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AB$. По условию задачи $\cup AB = 40^\circ$, отсюда $\angle ABD = 20^\circ$.



9. Ответ: 65.

Решение. Так как вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, то все его углы вписанные. Угол BCD опирается на дугу DAB , равную сумме дуг BC и CD , $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 56^\circ + 133^\circ = 189^\circ$. Угол DAB опирается на дугу, дополняющую дугу BCD до 360° , т. е. дугу BCD , равную 171° .

Угол ADC опирается на дугу ABC , равную сумме дуг AB и BC , $\sphericalangle AC = \sphericalangle AB + \sphericalangle BC = 56^\circ + 74^\circ = 130^\circ$. Угол ABC опирается на дугу, дополняющую дугу ABC до 360° , т. е. дугу ADC , равную 230° .

Таким образом, на наименьшую дугу ADC , равную 130° , опирается $\angle ADC$, следовательно, $\angle ADC = 65^\circ$.

10. Ответ: 16.

Решение. По свойству касательных к окружности, $BF = BD$, $AD = AG$, $CG = FC$. Так как центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла при вершине, а биссектриса угла при вершине в равнобедренном треугольнике является его медианой, то точка G — середина стороны AC . Следовательно, $AD = AG = CG = FC = 2$ см, а $BF = BD = 4$ см, находим $P_{ABC} = 16$ см.

11. Ответ: 17.

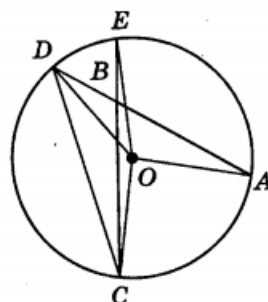
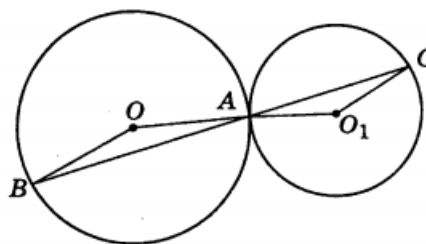
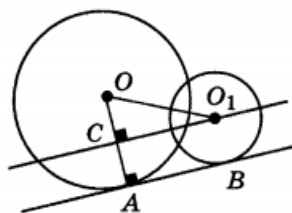
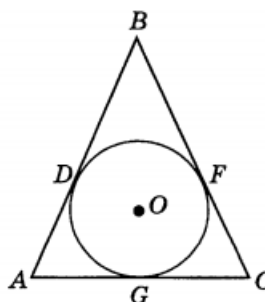
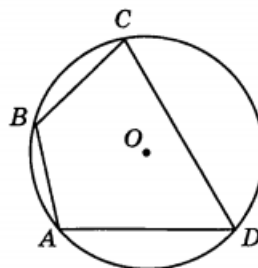
Решение. Через точку O_1 проводим прямую, параллельную прямой AB . Отрезок AO перпендикулярен прямой AB (радиус, проведенный в точку касания), значит, отрезок AO перпендикулярен и прямой, параллельной прямой AB , точку их пересечения обозначим C . К прямоугольному треугольнику OCO_1 применим теорему Пифагора. Гипотенуза — искомое расстояние OO_1 , один катет равен 15 см, второй катет равен разности радиусов окружностей $12 - 4 = 8$ (см). Отсюда $OO_1 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ (см).

12. Ответ: 15.

Решение. Треугольник AOB — равнобедренный, так как его стороны OA и OB являются радиусами одной окружности. Аналогично, треугольник AO_1C — равнобедренный. Равнобедренные треугольники AOB и AO_1C — подобны, так как углы OAB и O_1AC — вертикальные, а, значит, равны. Коэффициент подобия равен 3 ($OA = 9$ см, $AO_1 = 3$ см), $AB = 3AC = 15$ см.

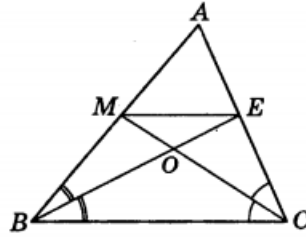
Часть 3

13. **Решение.** Проведем хорду DC . Рассмотрим $\triangle DBC$. Угол ABC является внешним углом треугольника DBC при вершине B . В силу теоремы о внешнем угле треугольника $\angle ABC = \angle BDC + \angle BCD$. Углы BDC и BCD , как вписанные, равны половинам соответствующих центральных углов, т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2} \angle DOE$. В свою очередь, градусная мера дуги AC равна градусной мере угла AOC , а градусная мера дуги DE равна градусной мере $\angle EOD$. Следовательно, градусная мера угла ABC равна полусумме градусных мер дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая между продолжениями сторон.



14. Ответ: 30.

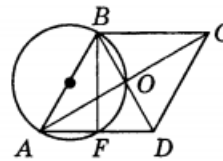
Решение. По условию $\angle BAC = 60^\circ$, значит, $\angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$. Так как BE и CM — биссектрисы углов ABC и ACB , то $\angle ABE + \angle ACM = 60^\circ$ и в треугольнике BOC $\angle BOC = 120^\circ$. В четырехугольнике $MAEO$: $\angle MAE = 60^\circ$, $\angle MOE = 120^\circ$, значит, около него можно описать окружность. В этой окружности вписанный угол MAE , равный 60° , опирается на дугу ME , равную 120° . Отрезок AO является биссектрисой угла MAE , так как проходит через точку пересечения биссектрис (точка O). Следовательно, точка O является серединой дуги ME и делит ее на две дуги. Значит, дуга MO равна 60° . Отсюда угол BEM равен 30° .



15. Ответ: 60.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, F — середина AD . Так как угол AOB — вписанный и опирается на диаметр, то $\angle AOB = 90^\circ$, т. е. диагонали параллелограмма перпендикулярны. Следовательно, $ABCD$ — ромб и $AB = AD$.

Угол AFB — также вписанный и опирается на диаметр, поэтому $\angle AFB = 90^\circ$. Следовательно, BF — медиана и высота треугольника ABD , значит, треугольник ABD — равнобедренный и $AB = BD$. Таким образом, $AB = AD$ и $AB = BD$, значит, треугольник ABD — равносторонний, т. е. $\angle DAB = 60^\circ$.

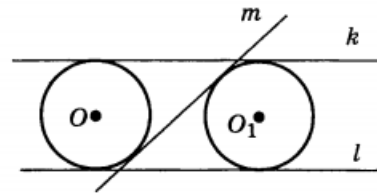


Вариант 2

Часть 1

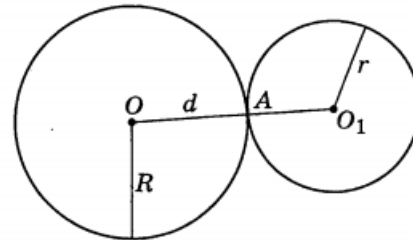
1. Ответ: 3.

Решение. Две параллельные прямые k и l делят плоскость на три части. А прямая m делит каждую из них на две части, таким образом получаем шесть частей. Две из них ограничены тремя данными прямыми, четыре другие части ограничены двумя лучами. Значит, только в две части плоскости можно вписать окружность так, чтобы она одновременно касалась каждой из трех прямых k , l и m .



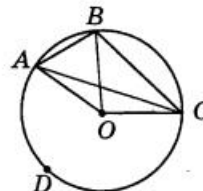
2. Ответ: 2.

Решение. Так как расстояние между центрами окружностей $d = 11$ см равно сумме длин радиусов $R + r = 7 + 4 = 11$ (см), то окружности имеют одну общую точку A . Следовательно, окружности касаются.



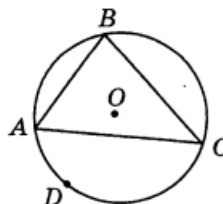
3. Ответ: 3.

Решение. Точка O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC является центром окружности, описанной около этого треугольника. Отсюда $OA = OB = OC$ как радиусы одной окружности. Значит, треугольники AOC , AOB и BOC — равнобедренные и боковые стороны у них равны. В треугольнике AOC $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$. Отсюда следует, что в треугольнике ABC сторона AC — большая, а против большей стороны лежит больший угол. Значит, в треугольнике ABC $\angle ABC$ — больший. Точки B и O лежат по разные стороны относительно хорды AC , так как точка пересечения серединных перпендикуляров лежит вне треугольника. При этом $\angle AOC$ опирается на дугу ABC , которая меньше 180° . Значит, $\angle ABC$ опирается на дугу ADC , которая больше 180° . Следовательно, вписанный угол ABC — больше 90° , а треугольник $\angle ABC$ — тупоугольный.



4. Ответ: 1.

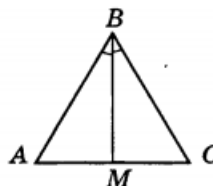
Решение. По условию углы треугольника ABC равны 45° , 60° и 75° . Значит треугольник ABC — остроугольный. Угол ABC — острый, следовательно, дуга ADC меньше полуокружности, отсюда точки B и O лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC . Аналогично доказывается, что точки A и O



лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC . Значит, точка O лежит внутри угла ACB . Аналогично доказывается, что точка O лежит внутри углов ABC и BAC . Следовательно, центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит внутри треугольника.

5. Ответ: 2.

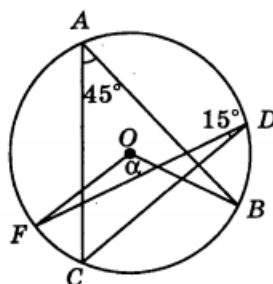
Решение. Центр вписанной окружности треугольника лежит на биссектрисе угла, а центр описанной окружности треугольника лежит на серединном перпендикуляре. По условию центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают, следовательно, в данном треугольнике точка пересечения биссектрис, проведенных к сторонам треугольника, совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к этим же сторонам треугольника. Следовательно, треугольник — равнобедренный.



Часть 2

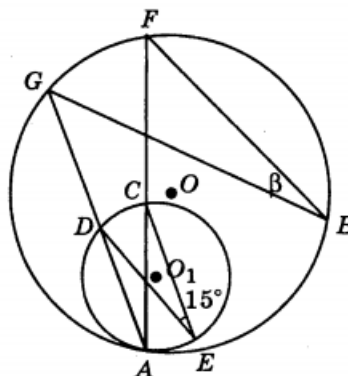
6. Ответ: 120.

Решение. Угол α является центральным углом FOB , который опирается на дугу FCB . Дуга FCB равна сумме дуг окружности FC и CB . Так как углы BAC и CDF — вписанные, то дуги FC и CB соответственно равны 30° и 90° . Следовательно, дуга FCB равна 120° , значит, угол FOB равен 120° .



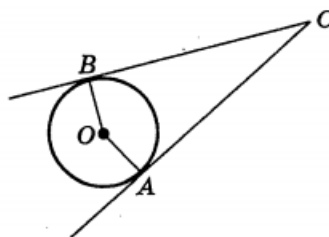
7. Ответ: 15.

Решение. Углы CAD и CED , вписанные в окружность с центром O_1 , опираются на одну и ту же дугу. Значит, угол CAD равен 15° . Углы GAF и GBF , вписанные в окружность с центром O также опираются на одну дугу. Значит, $\angle GBF = \beta = 15^\circ$.



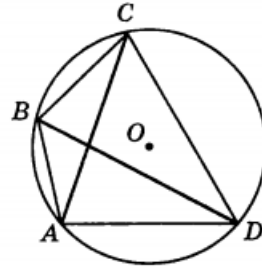
8. Ответ: 72.

Решение. Соединим центр окружности O с точками касания B и A . Четырехугольник $AOBC$ — выпуклый, значит, сумма его углов равна 360° . Углы OAC и OBC — прямые, так как OA и OB — радиусы, проведенные в точки касания. Центральный угол AOB равен 108° , так как он опирается на дугу, равную 108° . Значит, $\angle ACB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 108^\circ) = 72^\circ$.



9. Ответ: 55.

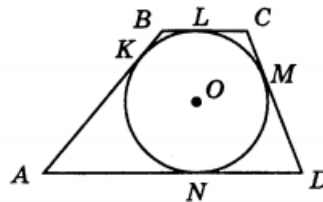
Решение. Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то сумма противоположных углов равна 180° , т. е. $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. В свою очередь $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$, откуда $\angle ABD + \angle DBC + \angle ADC = 180^\circ$. Значит, $\angle DBC = 180^\circ - \angle ABD - \angle ADC = 180^\circ - 50^\circ - 75^\circ = 55^\circ$. Углы DBC и CAD опираются на одну дугу DC , следовательно, они равны, поэтому $\angle CAD = 55^\circ$.



10. Ответ: 40.

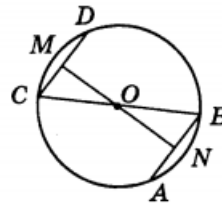
Решение. 1 способ. Так как трапеция описана около окружности, то по свойству описанного четырехугольника сумма боковых сторон трапеции равна сумме ее оснований, т. е. $AD + BC = AB + CD$. По условию $AD + BC = 20$ (см), значит, периметр трапеции равен 40 см.

2 способ. По свойству касательных к окружности $AN = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$. Отсюда, $AN + DN + BL + CL = AK + BK + CM + DM$, $AD + BC = AB + CD$. По условию $AD + BC = 20$ (см), значит, периметр трапеции равен 40 см.



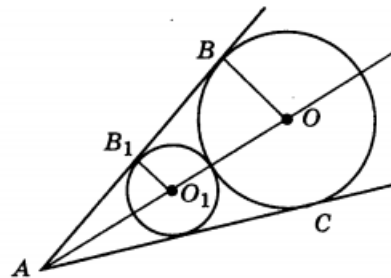
11. Ответ: 16.

Решение. Через центр окружности — точку O , проведем перпендикуляр MN к параллельным хордам AB и CD . По свойству перпендикуляра, опущенного на хорду из центра окружности, $AN = BN$. Треугольник OBN — прямоугольный по построению. Применим теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику OBN : $OB^2 = ON^2 + BN^2$, $ON^2 = OB^2 - BN^2$, откуда $ON = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см). Из равенства прямоугольных треугольников OBN и OCM следует $ON = OM$. Следовательно, $MN = 16$ см.



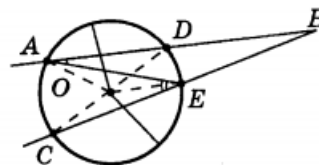
12. Ответ: 8.

Решение. Треугольник AO_1B_1 и AOB — прямоугольные, так как B и B_1 — точки касания, в которые проведены радиусы. Треугольники AO_1B_1 и AOB — подобны, так как угол BAO — общий, углы AB_1O_1 и ABO — прямые. Коэффициент подобия 3, поскольку $OO_1 = 2 AO_1$, $AO = 3 AO_1$. Следовательно, $OB = 3 O_1B_1$, $O_1B_1 = 8$ см.



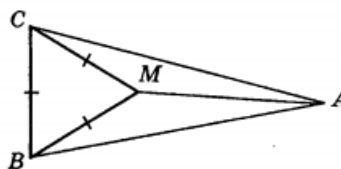
Часть 3

13. **Решение.** Проведем хорду AE . Рассмотрим треугольник ABE . Угол AEC является внешним углом треугольника DBC при вершине B . В силу теоремы о внешнем угле треугольника $\angle AEC = \angle BAE + \angle ABE$ или $\angle AEC = \angle BAE + \angle ABC$, откуда $\angle ABC = \angle AEC - \angle BAE$. Углы AEC и BAE , как вписанные, равны половинам соответствующих центральных углов, т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC - \frac{1}{2} \angle DOE$. В свою очередь, градусная мера дуги AC равна градусной мере $\angle AOC$, а градусная мера дуги DE равна градусной мере $\angle EOD$. Следовательно, градусная мера $\angle ABC$ равна полуразности градусных мер дуг, заключенных внутри угла.



14. Ответ: 20.

Решение. По условию $\angle ABC = 80^\circ$, а $\angle ACB = 70^\circ$, значит, $\angle ABC + \angle ACB = 150^\circ$ и $\angle BAC = 30^\circ$. Так как треугольник CMB — равносторонний, то $\angle BMC = 60^\circ$. Около треугольника ABC можно описать окружность, в этой окружности вписанный угол BAC , равный 30° , опирается на дугу BC . На эту же дугу BC опирается угол BMC , равный 60° . Значит, угол BMC является центральным по отношению к углу BAC , а точка M — центром окружности, описанной около треугольника ABC . Следовательно, $AM = BM = CM$ и треугольник BMA — равнобедренный. Отсюда следует, что $\angle MAB = \angle ABM$; $\angle ABM = \angle ABC - \angle CBM = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$. Отсюда угол ABM равен 20° .



15. Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, M и K — середины ее боковых сторон, являются центрами окружностей радиусов R и r .

Так как трапеция является описанной, то $AD + BC = AB + CD$. Поскольку отрезок MK является средней линией трапеции, то $MK = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AB + CD) = R + r$. Следовательно, окружности касаются, что и требовалось доказать.

